TD 1

correction des SF

SF de base

▷ $u(t) = U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \underline{u} = U_0\, e^{j(\omega t + \pi/4)}$

$= \underline{U_0}\, e^{j\omega t}$ avec $\underline{U_0} = U_0\, e^{j\pi/4}$

▷ $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi) \rightarrow \underline{i} = I\sqrt{2}\, e^{j(\omega t - \varphi)}$

$= \underline{I_0}\, e^{j\omega t}$ avec $\underline{I_0} = I\sqrt{2}\, e^{-j\varphi}$

▷ $s(t) = S_m \sin(\omega t)$

$= S_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \underline{s} = S_m\, e^{j(\omega t - \pi/2)}$

$= \underline{S_m}\, e^{j\omega t}$ avec $\underline{S_m} = S_m\, e^{-j\pi/2}$

▷ $\underline{U_m} = U_m\, e^{-j\pi/3} \longrightarrow u(t) = U_m \cos(\omega t - \pi/3)$

▷ $\underline{I_1} = -\frac{j U_0}{R} \rightarrow i(t) = Re\left(-j\frac{U_0}{R}\, e^{j\omega t}\right)$

$= Re\left(-j\frac{U_0}{R}\cos\omega t - j\frac{U_0}{R}\, j\sin\omega t\right)$

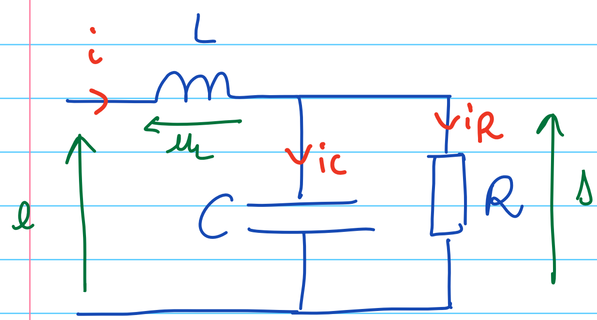
$= Re\left(-j\frac{U_0}{R}\cos\omega t + \frac{U_0}{R}\sin\omega t\right)$

$= \frac{U_0}{R}\sin(\omega t)$

▷ $\underline{I} = -I_m\, e^{j\pi/6} = I_m\, e^{j(\pi/6 + \pi)}$

$\rightarrow i(t) = I_m \cos\left(\omega t + \frac{7\pi}{6}\right)$

SF 1



▷ ED directement :

On applique la loi des mailles : $e(t) = u_L(t) + s(t)$

$$= L\frac{di}{dt} + s(t)$$

D'après la loi des noeuds $i(t) = i_C(t) + i_R(t)$

Donc $$e(t) = L\frac{di_C}{dt} + L\frac{di_R}{dt} + s(t)$$

or $s(t) = R\,i_R$ et $i_C = C\dfrac{ds}{dt}$

Donc $$\boxed{e(t) = LC\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{ds}{dt} + s(t)}$$

Sous forme canonique : $\dfrac{d^2s}{dt^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{ds}{dt} + \dfrac{1}{LC}s(t) = \dfrac{1}{LC}e(t)$

On identifie $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{RC}$

d'où $Q = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \times RC = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

▷ Fonction de transfert directement

On a une impédance équivalente à R et C :

$$\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = j\omega C + \frac{1}{R} = \frac{1 + j\omega RC}{R}$$

Donc $\underline{Z_{eq}} = \dfrac{R}{1 + j\omega RC}$

Par le pont diviseur de tension, on a directement

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{j\omega L + \underline{Z_{eq}}}\,\underline{e}$$

ie $$\underline{H} = \frac{R/(1+j\omega RC)}{j\omega L + R/(1+j\omega RC)} = \frac{R}{j\omega L(1+j\omega RC) + R}$$

$$= \frac{R}{R + j\omega L - \omega^2 RLC} = \boxed{\frac{1}{1 + j\omega\frac{L}{R} - \omega^2 LC}}$$

On identifie $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\dfrac{1}{\omega_0 Q} = \dfrac{L}{R}$

d'où $Q = \dfrac{R}{L}\sqrt{LC} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

▷ Passage de l'ED à la fonction de transfert

ED : $$e(t) = LC\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{ds}{dt} + s(t)$$

On passe en complexes : $\underline{e} = LC(j\omega)^2\underline{s} + \frac{L}{R}j\omega\,\underline{s} + \underline{s}$

Donc $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + \frac{L}{R} j\omega - LC\omega^2}$ ✓

▷ Passage de la fonction de transfert à l'ED

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R} j\omega - LC\omega^2} \Rightarrow \underline{e} = LC (j\omega)^2 \underline{s} + \frac{L}{R} j\omega \underline{s} + \underline{s}$$

Donc $e(t) = LC \dfrac{d^2 s}{dt^2} + \dfrac{L}{R} \dfrac{ds}{dt} + s(t)$ ✓

SF2

On a $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0 Q} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

En basse fréquence, on a la fonction de transfert équivalente

$\underline{H}_{BF} = 1$

Donc $G_{BF} = 1$ et $G_{dBBF} = 0$

et $\varphi_{BF} = 0$

En haute fréquence, on a la fonction de transfert équivalente

$\underline{H}_{HF} = \dfrac{1}{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}$

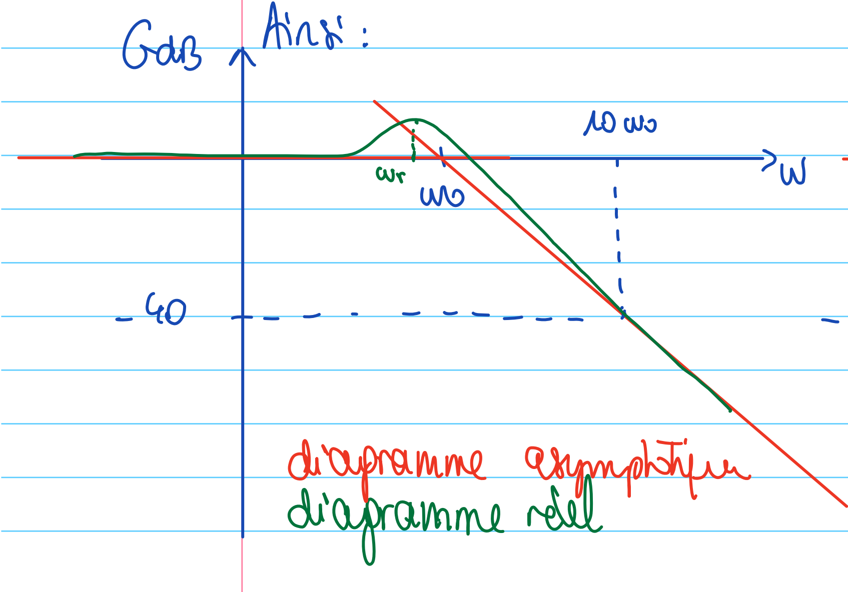
Donc $G_{HF} = \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}$ et $G_{dBHF} = 20\log\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$

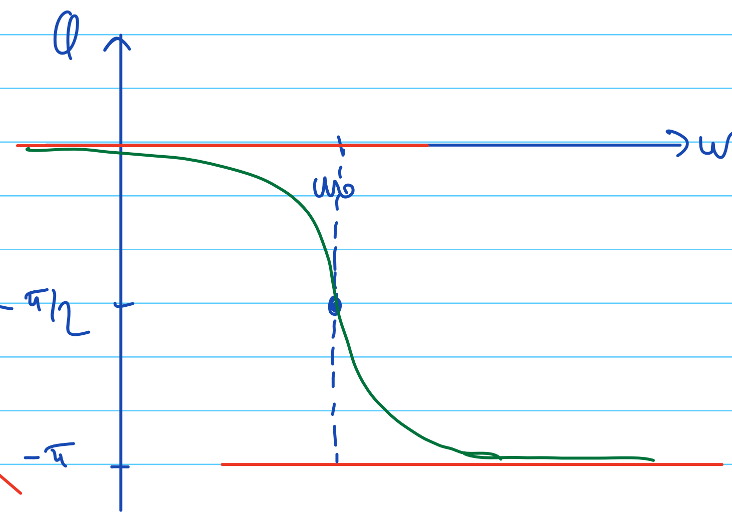
$= 20\log\omega_0^2 - 40\log\omega$

pente $-40\,\text{dB/déc}$

et $\varphi_{HF} = -\pi$

Ainsi :





Pour tracer le diagramme réel, il faut calculer Q

Ici $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 1000 \times \sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-9}}{0,1}}$

$= 10^3 \times \sqrt{10^{-7} \times 10}$

$= \underline{1}$. Il y a donc résonance, mais pas très marquée.

SF3

1) $e(t) = E_0 \left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) + \cos(\omega_3 t)\right)$

Alors

$$s(t) = E_0 \left(G(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \varphi(\omega_1)) + G(\omega_2)\cos(\omega_2 t + \varphi(\omega_2)) + G(\omega_3)\cos(\omega_3 t + \varphi(\omega_3))\right)$$

On lit graphiquement $G(\omega_1) = 10^{0/20} = 1$

$G(\omega_3) = 10^{-40/20} = 10^{-2}$

Par ailleurs, on sait que $G(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ou $G_{dB}(\omega_0) = -3\text{dB}$)

Pour les phases, on lit graphiquement

$\varphi(\omega_1) = 0$; $\varphi(\omega_3) = -\frac{\pi}{2}$ et $\varphi(\omega_2) = -\frac{\pi}{4}$.

Ainsi, $\boxed{s(t) = E_0\left(\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right) + 10^{-2}\cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right)\right)}$

2) La pulsation $\frac{\omega_0}{1000}$ est très petite devant ω_0 : le signal d'entrée a donc une très grande partie (voire toutes) de ses composantes dans la bande passante : le signal de sortie est donc le même que le signal d'entrée.

3) Pour un signal de pulsation $1000\,\omega_0$, le filtre aura un effet moyenneur : en sortie, on aura un signal constant valant la valeur moyenne du signal d'entrée.

SF4

1) Filtre 1 : passe bas, a priori d'ordre 2 (pente $-40\,dB/déc$)

On peut proposer $\underline{H}_1 = \dfrac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ avec $H_0 = 10^{40/20} = 100$
$\omega_0 = 2\pi \times 10^{-1}\ rad.s^{-1}$

Pour proposer une valeur de Q, il faudrait le tracé réel.

Filtre 2 : passe-bande, a priori ordre 2

On peut proposer $\underline{H}_2 = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ avec $\omega_0 = 10^3\ rad.s^{-1}$

Pour proposer une valeur de H_0 et Q, il faudrait le diagramme réel

Filtre 3 : passe-haut, a priori d'ordre 1 (pente $+20\,dB/déc$)

On peut proposer $\underline{H}_3 = \dfrac{H_0 j\omega/\omega_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$

avec $\omega_0 = 100\ rad.s^{-1}$ et $H_0 = 10^{-20/20} = 0{,}1$.

2) Seul le filtre 2 peut être un intégrateur simple pour des signaux de pulsation supérieure à $1000\ rad.s^{-1}$, car on a alors une pente $-20\,dB/déc$.

Pour obtenir un dérivateur, il faut une pente $+20\,dB/déc$ sur le diag. de Bode
C'est le cas pour le filtre 2 pour des pulsations inférieures à $1000\ rad.s^{-1}$ ou pour le filtre 3 pour des fréquences inférieures à $100\ rad.s^{-1}$.

SF 5

Système 1 : les composantes basse fréquence (fondamental et 2° harmonique) sont conservées
l'harmonique de rang 3 est très atténuée
les harmoniques de rang 4 et 5 sont filtrés

Il s'agit donc d'un passe-bas de fréquence propre proche de $2f$.

Système 2 : l'harmonique de rang 3 est conservé
ses voisines de rang 2 et 4 sont conservées mais atténuées

Il s'agit donc d'un passe-bande de fréquence propre proche de $3f$

Système 3 : on voit l'apparition d'harmoniques non présentes sur le spectre du signal d'entrée

Ce système n'est donc pas linéaire.

SF6

1) Non, ce n'est pas possible car la DSF du signal n'a aucune composante à 10 kHz (pas multiple impaire de 3 kHz)

2) Oui, il faut un passe bande très sélectif ($Q \gg 1$) de fréquence propre 9 kHz. On sélectionne ainsi l'harmonique de rang 3 de la DSF du signal d'entrée.

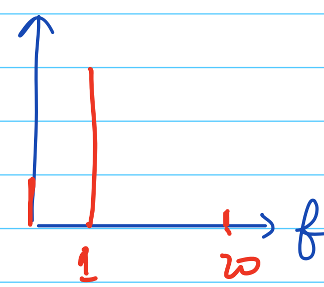
3) Oui, il faut un filtre intégrateur. On peut proposer un passe bas d'ordre 1 de fréquence de coupure de l'ordre de qq centaines de Hz.

4) Oui, il suffit de prendre un filtre coupant toutes les composantes ie soit un passe bas de fréquence propre $\ll$ 3 kHz
haut $\gg$ 3 kHz.

TDE1

Exercice 2 - Filtrage

1)



2) $e(t) = 1 + 3\cos(2\pi \times 1000\,t) + 0{,}1\cos(2\pi \times 2000t + \pi/2)$

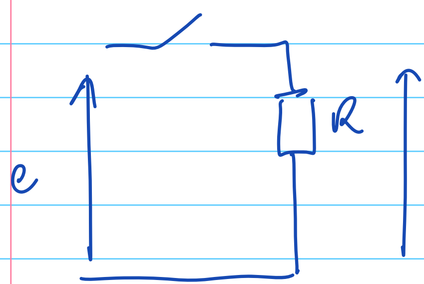
3) 1) Il ne reste que la composante continue
2) composante continue + fondamental
3) Signal conservé

4) signal rendu alternatif
5) seul le bruit est conservé
6) dérivée du signal

7) seul le bruit est conservé
8) Bruit + valeur moyenne conservés

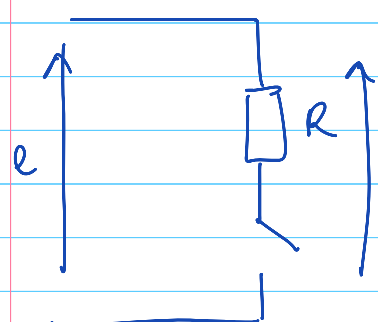
Exercice 3 - Passe-haut

1) Le circuit équivalent en basse fréquence est



$s = Ri = 0$ car l'interrupteur ouvert impose $i = 0$

En haute fréquence :



$s = e$

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut

2) Par le pont diviseur de tension :

$$\underline{s} = \underline{e} \times \frac{R + jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\underline{H} = \frac{Rj\omega C - LC\omega^2}{1 + Rj\omega C - LC\omega^2}$$

$$RC = \frac{1}{\omega_0 Q} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC}$$

Posons $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

On a alors $\underline{H} = \dfrac{jx/Q - x^2}{1 + jx/Q - x^2}$.

3) En basses fréquences, la fonction de transfert équivalente est $\underline{H}_{BF} = \dfrac{jx/Q}{1} = j\dfrac{x}{Q}$

On a alors $G_{dBBF}(x) = 20 \log x - 20 \log Q$

↳ d'où une pente $+20$ dB/décade

en hautes fréquences, on a $\underline{H}_{HF} = \dfrac{-x^2}{-x^2} = 1$

d'où une pente nulle

Par ailleurs, on a sur l'asymptote BF le point $(1, -20)$

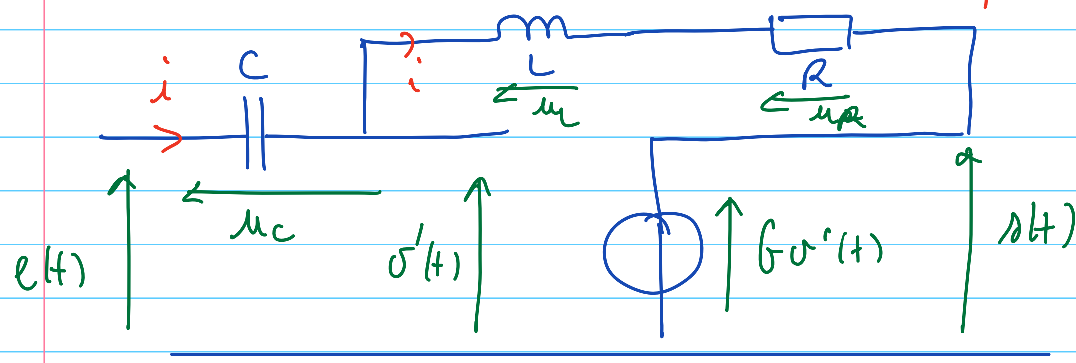
Donc $20 \log 1 - 20 \log Q = -20$

Donc $\log Q = 1$ ie $\boxed{Q = 10}$.

4) Si la fréquence du signal est très petite devant la fréquence propre du circuit, toutes les composantes sont sur la pente à $+20$dB/déc. Le circuit a alors un rôle dérivateur très atténuant. Il est donc logique d'obtenir un signal carré très atténué.

Si la fréquence du signal est seulement légèrement inférieure à la fréquence propre du circuit, les composantes basses sont atténuées, mais les hautes fréquences conservées. D'où l'obtention d'un signal formé d'une succession d'impulsions.

Exercice 4 - Stabilité d'un circuit électrique



1) On a $e(t) = s(t) + u_R + u_L + u_C$ par une loi des mailles

ie $e(t) = s + Ri + L\frac{di}{dt} + u_C$

$$= s + RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt} + u_C$$

Or, on a également $e = u_C + v'(t)$ par une loi des mailles.

ayant $s = Gv'$, on a donc $u_C = e - \frac{s}{G}$

d'où

$$e(t) = s + RC\left(\frac{de}{dt} - \frac{1}{G}\frac{ds}{dt}\right) + LC\left(\frac{d^2e}{dt^2} - \frac{1}{G}\frac{d^2s}{dt^2}\right) + e - \frac{s}{G}$$

ie $GRC\frac{de}{dt} + GLC\frac{d^2e}{dt^2} = s(1-G) + RC\frac{ds}{dt} + LC\frac{d^2s}{dt^2}$.

2) le circuit est stable si tous les coefficients du 1e membre de l'ED sont de même signe

ie si $1-G>0$

ie $G<1$ le montage n'est pas stable.

3) $s(t)$ aura au moins un terme exponentiel divergent.

$$\Delta = (RC)^2 - 4(1-G)LC \overset{G=2}{=} (RC)^2 + 4LC > 0$$

On a donc

$$s(t) = A\exp\left(\frac{-RC+\sqrt{\Delta}}{2\times LC}t\right) + B\exp\left(\frac{-RC-\sqrt{\Delta}}{2LC}t\right)$$

$$= A\exp\left(\frac{-RC+\sqrt{\Delta}}{2LC}t\right) + B\exp\left(-\frac{RC+\sqrt{\Delta}}{2LC}t\right)$$

or $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(RC)^2 + 4LC} > RC$

Donc $-RC + \sqrt{\Delta} > 0$

Ainsi $A\exp\left(\frac{-RC+\sqrt{\Delta}}{2LC}t\right)$ diverge, ce qui est cohérent avec le caractère instable du montage

Pour aller + loin

Exercice 5 - Filtrage

1) On peut faire une analyse de Fourier : si le spectre obtenu a un seul pic, le signal est bien sinusoïdal.

2) Le signal d'entrée n'est pas alternatif car il a une moyenne non nulle.
En revanche, la sortie est alternative.
Cela est cohérent avec la nature du filtre : le passe-bande ne laisse pas passer la composante continue.

3) Expérience 1 : un harmonique est égal à la fréquence propre du passe-bande
Il est donc amplifié tandis que les autres harmoniques sont atténuées

Expérience 2 : la majorité des harmoniques sont au niveau d'une asymptote $-20\,dB/dec$. Le filtre a alors un rôle intégrateur. L'amplitude est tout de même très atténuée

4) Tout d'abord, l'expérience 1 est telle que la fréquence de sortie est la fréquence propre du filtre (puisque l'amplitude diminue si on augmente ou diminue la fréquence du créneau).
Ainsi

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \times \frac{1}{5\times 50.10^{-6}} = \underline{2,5.10^{4}\ rad.s^{-1}}$$

Par ailleurs, le fondamental est l'harmonique sélectionné (puisque la fréquence en sortie est celle de l'entrée).
On peut donc par ailleurs que le signal de sortie est sinusoïdal.

Ainsi $\quad S_0 = |\underline{H}(\omega_0)| \times \underbrace{\frac{2V_0}{\pi(2\times 0+1)}}_{\text{amplitude du fondamental}} = H_0 \times \frac{2V_0}{\pi}$

amplitude du signal SINUSOÏDAL en sortie

On a donc $H_0 = \frac{\pi S_0}{2V_0} = \frac{\pi \times 3 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 0{,}\cancel{1}} \simeq \underline{10}$.

Enfin, dans l'expérience 2, on a un comportement intégrateur :

$$\underline{H}_{HF} = \frac{H_0}{jQ\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Donc $\underline{e} = j\omega \frac{Q}{H_0\omega_0} \underline{s}$

Toutes les composantes SAUF la composante continue sont dans ce domaine HF. On a donc

$$e(t) - \frac{V_0}{2} = \frac{Q}{H_0\omega_0} \frac{ds}{dt}$$

On a donc $Q = \frac{H_0\omega_0}{ds/dt}\left(e(t) - \frac{V_0}{2}\right)$

en particulier $\forall t \in [0, T]$, on a $e(t) = V_0 = 2 \times 2 = \underline{4V}$.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\cancel{5} \times 0{,}\cancel{2}}{\cancel{2} \times \cancel{5}.10^{-6}} = 10^5\ V/s$$

on monte de 5 carreaux
de 0,2 V
en 2 carreaux de 5 µs.

au final $Q = \frac{10 \times 2{,}5.10^4}{10^5}\left(4 - \frac{4}{2}\right) = \underline{5}$.

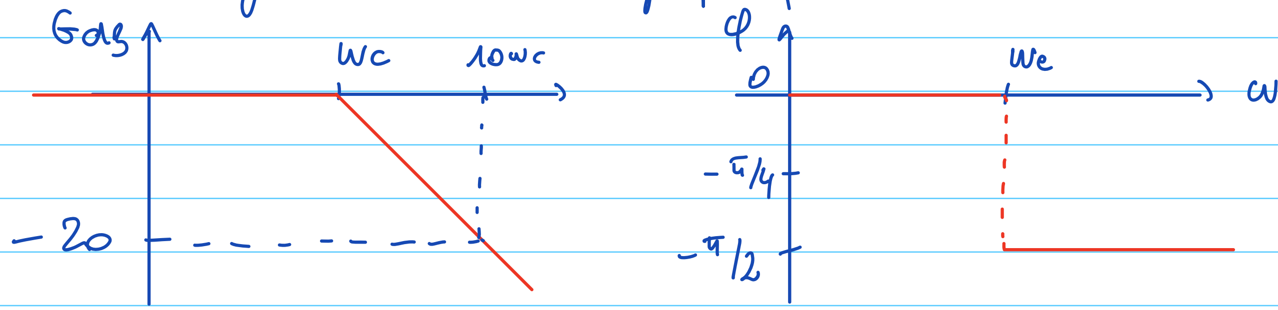
Exercice 6 - Mesure d'impédance par détection synchrone

1) R_1C_1 est un filtre passe-bas d'ordre 1.

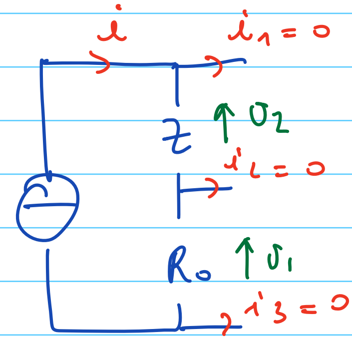
Un filtre passe-bas d'ordre 1 peut servir de moyenneur ou d'intégrateur (selon sa pulsation de coupure par rapport à la pulsation du signal d'entrée)

On a $\underline{H} = \dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$ avec $\omega_c = \dfrac{1}{RC}$ (cf cours)

et son diagramme de Bode asymptotique :



2) On a



car l'impédance d'entrée du multiplieur est ∞.

On a donc $\underline{v_1} = R_0 \underline{i}$ ie $\boxed{v_1(t) = R_0 I_0 \cos(\omega t)}$

et $\underline{v_2} = \underline{Z}\,\underline{i} = X I_0 e^{j\omega t} + jY I_0 e^{j\omega t}$

$= X I_0 (\cos\omega t + j\sin\omega t) + jY I_0(\cos\omega t + j\sin\omega t)$

$$\boxed{v_2(t) = \mathrm{Re}(\underline{v_2}) = X I_0 \cos \omega t - Y I_0 \sin(\omega t)}$$

3) $U_1 e^{j\omega t} \times U_2 e^{j(\omega t + \varphi)} = U_1 U_2 (\cos \omega t + j \sin \omega t)(\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi))$

$= U_1 U_2 (\cos(\omega t) \times \cos(\omega t + \varphi) - \sin \omega t \times \sin(\omega t + \varphi) + j \ldots)$

Ainsi $\mathrm{Re}\left(U_1 e^{j\omega t} \times U_2 e^{j(\omega t + \varphi)}\right) = U_1 U_2 \left(\cos(\omega t) \times \cos(\omega t + \varphi) \underbrace{- \sin \omega t \times \sin(\omega t + \varphi)}_{\neq 0}\right)$

$\neq U_1 U_2 \cos(\omega t) \times \cos(\omega t + \varphi)$

4) $v_3(t) = k\, v_1(t)\, v_2(t)$

$= k I_0^2 R_0 (X \cos^2(\omega t) - Y \cos(\omega t) \sin(\omega t))$

$\cos^2 \theta = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}$ et $\cos \theta \times \sin \theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$

$= k I_0^2 R_0 \left(X \dfrac{1 + \cos 2\omega t}{2} - Y \dfrac{\sin 2\omega t}{2}\right)$

$= k I_0^2 R_0 \left(\dfrac{X}{2} + \dfrac{X}{2} \cos(2\omega t) - \dfrac{Y}{2} \sin(2\omega t)\right)$

$= k I_0^2 R_0 \left(\dfrac{X}{2} + C \cos(2\omega t + \varphi)\right)$

avec $C = \dfrac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{2}$ $\quad \varphi = \arccos\left(\dfrac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right)$ car $\ominus Y/2$

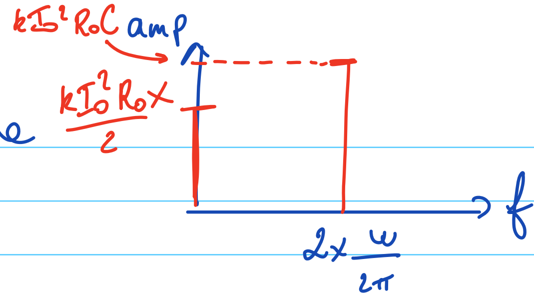
$C \cos(2\omega t + \varphi) = \underbrace{(C \cos \varphi)}_{= \frac{X}{2}} \cos(2\omega t) - \underbrace{(C \sin \varphi)}_{= -\frac{Y}{2}} \sin(2\omega t)$

$(C \cos \varphi)^2 + (C \sin \varphi)^2 = C^2 = \dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{4} \Rightarrow C = \dfrac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{2}$

et $\sin \varphi > 0$

Donc $\cos \varphi = \dfrac{X}{2C} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\dfrac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right)$

On a donc le spectre



5) Si R_1 et C_1 sont choisis de sorte que R_1C_1 soit un moyenneur, on ne conserve en sortie que la valeur moyenne du signal v_3

ie $kI_0^2R_0\frac{X}{2}$. $\Rightarrow$ on peut déduire X.

Pour cela il faut que le fondamental à 2ω soit filtré ie

$$\frac{1}{R_1C_1} \ll 2\omega \qquad \text{ie} \qquad R_1C_1 \gg \frac{1}{2\omega}$$

6) On aurait alors $v_2(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{I_0 e^{j\omega t}}{j\omega C_0}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{I_0}{\omega C_0}(j\cos\omega t - \sin\omega t)\right)$

$$= -\frac{I_0}{\omega C_0}\sin(\omega t)$$

Lors de la multiplication, c'est donc le terme en sinus qui amènera une composante constante.
Par le même raisonnement, on aurait donc accès à Y.